Het naaldenexperiment van Buffon

(Ph. Cara, 3 april 2015)

1 Definitie en korte geschiedenis van π

Reeds in 400 v.Chr. stelde de Griek Hippocrates vast dat de verhouding tussen de oppervlakte van een cirkelschijf en het kwadraat van de straal van die schijf niet afhangt van de gootte van de schijf. Als we dus de straal van een cirkel met r noteren en de oppervlakte ervan met A_r, krijgen we dat de breuk A_r/r^2 een constante is, hoe groot of hoe klein de straal $r > 0$ ook moge zijn. We noteren die constante π_1.

Niemand minder dan de beroemde Euclides bewees in 300 voor onze jaartelling dat ook de verhouding tussen de omtrek van een cirkel en de diameter constant is. We krijgen dus een tweede constante π_2 die voldoet aan $\pi_2 = \frac{L_r}{2r}$, voor elke straal $r > 0$. Hierbij staat L_r voor de omtrek van een cirkel met straal r.

In 230 v.Chr. bewees Archimedes op ingenieuze wijze dat deze twee constanten in werkelijkheid dezelfde zijn: $\pi_1 = \pi_2$.

Sinds 1706 noteren we deze constante met de Griekse letter π, de eerste letter van het woord $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\nu$, Grieks voor omtrek. De wiskundige Euler maakte deze notatie populair door ze veelvuldig te gebruiken. Hij toonde dat π op heel veel plaatsen van de wiskunde (soms onverwacht) opduikt en bewees onder andere dat

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Er is steeds veel interesse geweest voor het berekenen van zoveel mogelijk decimalen van het getal π. In het begin gewoon om deze constante beter te leren kennen en te onderzoeken. Later ook om computers te testen.

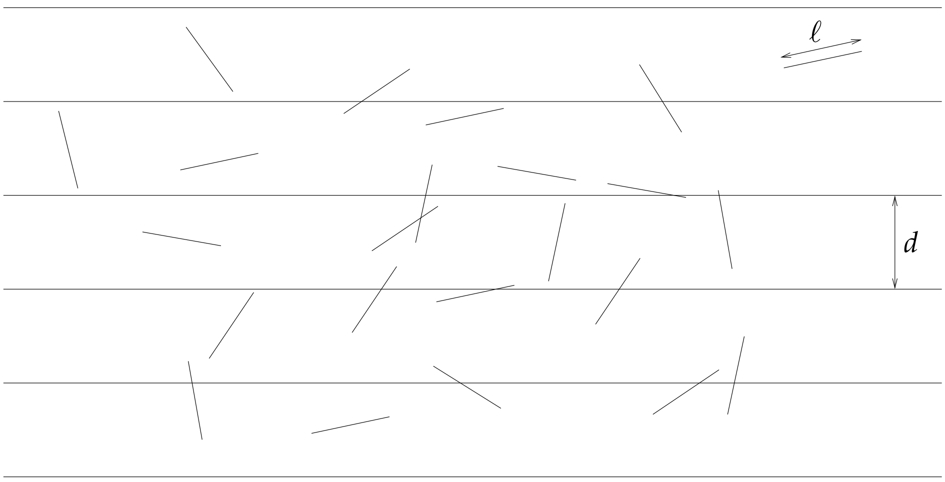
Ludolph van Ceulen berekende in 1596 twintig decimalen van π. Kondo en Yee berekenden in 2013 (gedurende 94 dagen) twaalfduizend miljard decimalen van π. Dit is het huidige wereldrecord. Het wegschrijven van deze benadering van π neemt om en bij de 9.2 TByte in beslag.

Voor het benaderen van de waarde van π zijn er in de loop van de geschiedenis vele methoden bedacht. Wij belichten hier een methode die aanleiding geeft tot een leuk experiment dat op π-dag 2015 levensgroot werd uitgevoerd op de VUB.

2 Het naaldenexperiment van Buffon

In 1777 bedacht de Fransman Georges Louis Leclerc, bijgenaamd Comte de Buffon, volgende proef.

Teken op een blad papier evenwijdige lijnen op gelijke afstand van mekaar. Neem dan een naald waarvan de lengte juist de helft is van de afstand tussen de lijnen en laat die willekeu-



Figuur 1: Het naaldenexperiment van Buffon.

rig op het blad vallen. Dan kan de naald snijdend zijn met een lijn van het blad of niet. Als je deze proef nu vele malen herhaalt en de verhouding bijhoudt tussen het aantal keer dat je de naald hebt geworpen en het aantal keer dat ze op een lijn is beland, gaat deze verhouding een benadering van π zijn.

Hoe meer je de proef herhaalt, hoe beter die benadering. Wiskundigen zeggen dat de verhouding in kwestie *convergeert* naar π. Nog anders zegt men dat de verhouding "in de limiet" π wordt.

De bedoeling van dit artikel is om wiskundig te bewijzen dat Buffon gelijk had. Meer precies zullen we volgende stelling aantonen.

Stelling 1. *Indien een naald van lengte ℓ valt op een gelijnd blad papier, waarbij alle lijnen evenwijdig zijn en op afstand $d > \ell$ van elkaar liggen, is de kans dat de naald een van de lijnen snijdt juist gelijk aan*

$$p = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{d}.$$

Als we, zoals in de proef hierboven, ℓ gelijkstellen aan $d/2$ krijgen we inderdaad dat p exact gelijk is aan $1/\pi$ zodat $\pi = 1/p$.

In de stelling ontmoeten we het woord *kans*. Het loont de moeite om dit wiskundig wat uit te diepen.

3 Gemiddelden en kansen

Laat ons meteen enkele symbolen definiëren. Het totaal aantal keer dat we de naald opwerpen noemen we N en het aantal keer dat de naald op een lijn valt stellen we gelijk aan P. Wat we dan eigenlijk willen bewijzen kan met een *limiet* geschreven worden als

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{P}{N} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{d}.$$

Een kans op een bepaalde uitkomst van een experiment wordt inderdaad bepaald door het aantal keer te tellen dat die uitkomst optreedt en dit te delen door het totaal aantal keer dat de proef werd herhaald. Dit is juist de breuk P/N.

In de wiskunde is het dikwijls leerrijk om een probleem te veralgemenen en vanuit een ander standpunt te bekijken. Laat ons nu even het standpunt van de naald innemen en afstappen van de beperking $\ell < d$. Een langere naald kan *meerdere* rechten op het blad snijden. Voor een gegeven naald is het dus van belang om te tellen *hoeveel* rechten die snijdt. Dit aantal hangt natuurlijk af van hoe de naald valt en kan met kansen berekend worden. Een gegeven naald van lengte ℓ kan 0, 1, 2, 3, ... keer een rechte van het blad snijden. Het is duidelijk dat er een grotere kans is dat een naald juist 1 rechte snijdt dan dat ze er 2 snijdt. Die kans is dan weer groter dan de kans dat de naald 3 lijnen ontmoet. Als we de proef vele malen herhalen, kunnen we telkens bijhouden hoeveel keer de naald een lijn ontmoet. Dit kunnen we dan gebruiken om een *gemiddelde* te berekenen. Het gemiddeld aantal rechten dat de naald ontmoet is dan gelijk aan

$$\mathbb{E}(\ell) = p_1(\ell) + 2p_2(\ell) + 3p_3(\ell) + \cdots . \tag{1}$$

Hierbij staat $p_1(\ell)$ voor de kans dat de naald juist 1 rechte snijdt, $p_2(\ell)$ voor de kans dat de naald juist 2 rechten snijdt, $p_3(\ell)$ voor de kans dat de naald juist 3 rechten snijdt, enz.

4 Eigenschappen van het gemiddelde

Het is duidelijk dat een langere naald aanleiding zal geven tot een groter gemiddeld aantal snijdingen met de lijnen op het blad. Wiskundig schrijven we

$$\ell_1 \leqslant \ell_2 \implies \mathbb{E}(\ell_1) \leqslant \mathbb{E}(\ell_2). \tag{2}$$

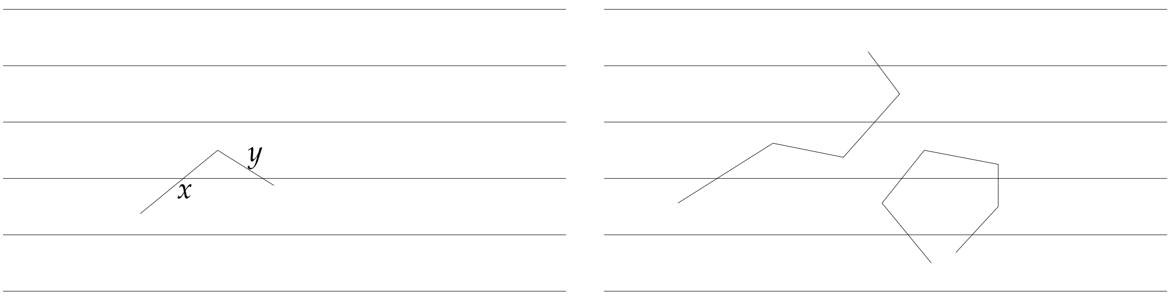
Laat ons nu het probleem nog veralgemenen en ook *geknikte naalden* toelaten. Als we bijvoorbeeld een naald hebben met lengte x voor de knik en lengte y na de knik, is het duidelijk dat het gemiddeld aantal snijpunten van deze geknikte naald met de lijnen op het blad de som zal zijn van het gemiddelde voor een naald van lengte x en dat voor een naald van lengte y. Vermits de totale lengte van de naald $x + y$ is, hebben we

$$\mathbb{E}(x + y) = \mathbb{E}(x) + \mathbb{E}(y).$$

Deze eigenschap laat ons toe om voor allerlei naalden die bestaan uit aaneengekleefde rechte stukken het gemiddeld aantal snijpunten te berekenen.

Die naalden noemen we *polygonale naalden*. Er zijn natuurlijk speciale gevallen, bijvoorbeeld waar $x = y$. Dit levert $\mathbb{E}(2x) = \mathbb{E}(x + x) = \mathbb{E}(x) + \mathbb{E}(x) = 2\mathbb{E}(x)$. Op die manier kan je, door naalden met $k \in \mathbb{N}_0$ stukken van lengte x te werken, bewijzen dat

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \mathbb{E}(kx) = k\mathbb{E}(x).$$



Figuur 2: Geknikte en polygonale naalden.

Als we deze eigenschap omgekeerd gebruiken, kunnen we ook narekenen dat $3\mathbb{E}(\frac{1}{3}x) = \mathbb{E}(x)$ zodat $\mathbb{E}(\frac{1}{3}x) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(x)$. Algemeen hebben we

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \mathbb{E}\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{k}\mathbb{E}(x).$$

Als we beide eigenschappen combineren vinden we

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_0^+ \colon \mathbb{E}\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}\mathbb{E}(x). \tag{3}$$

De *dichtheidseigenschap* van de rationale getallen in de reële getallen garandeert dat we tussen elke twee reële getallen x en y, hoe dicht bij mekaar ze ook liggen, steeds een rationaal getal kunnen vinden. Hieruit volgt dat je voor een willekeurig reëel getal $r \geqslant 0$ steeds breuken m/n en k/l kan vinden met

$$\frac{m}{n} \leqslant r \leqslant \frac{k}{l}$$

en bovendien het verschil $\frac{k}{l} - \frac{m}{n}$ kleiner dan om het even welke vrij gekozen $\varepsilon > 0$. Dit betekent dat r willekeurig goed kan benaderd worden door breuken. Samen met eigenschap (2) laat dit toe te zeggen dat voor elke $x \in \mathbb{R}^+$ geldt $\mathbb{E}(\frac{m}{n}x) \leqslant \mathbb{E}(rx) \leqslant \mathbb{E}(\frac{k}{l}x)$, waaruit we via eigenschap (3) halen dat $\frac{m}{n}\mathbb{E}(x) \leqslant \mathbb{E}(rx) \leqslant \frac{k}{l}\mathbb{E}(x)$. Hieruit halen we dan uiteindelijk dat

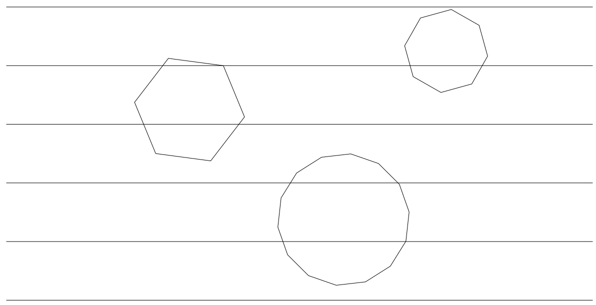
$$\forall x, r \in \mathbb{R}^+ \colon \mathbb{E}(rx) = r\mathbb{E}(x).$$

Vermits we voor elk positief reëel getal ℓ kunnen schrijven dat $\ell = \ell \cdot 1$, krijgen we dat

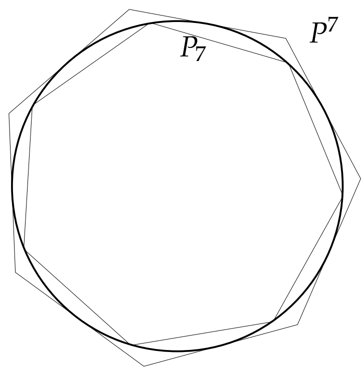
$$\forall \ell \in \mathbb{R}^+ \colon \mathbb{E}(\ell) = \mathbb{E}(\ell \cdot 1) = \ell\mathbb{E}(1).$$

We kunnen dus het gemiddeld aantal snijdingen voor een polygonale naald van totale lengte ℓ berekenen van zodra we $\mathbb{E}(1)$ kennen, het gemiddeld aantal snijdingen voor een naald van lengte 1. Laat ons deze *constante* c noteren. Er geldt nu

$$\forall \ell \in \mathbb{R}^+ \colon \mathbb{E}(\ell) = c\ell. \tag{4}$$



Figuur 3: Gesloten naalden.



Figuur 4: Ingeschreven en omgeschreven regelmatige 7-hoek.

5 Polygonale en ronde naalden

Niets verbiedt ons om polygonale naalden te beschouwen die gesloten zijn. Ook hiervoor geldt dat het gemiddeld aantal snijdingen met de lijnen van het papier recht evenredig is met de omtrek van de polygoon in kwestie.

Als we nu regelmatige veelhoeken nemen en het aantal hoeken laten toenemen, krijgen we in de limiet een cirkel. Voor een cirkel C of een veelhoek P gebruiken we ook de notaties $\mathbb{E}(C)$ en $\mathbb{E}(P)$ om het gemiddeld aantal snijdingen met de lijnen op het blad voor te stellen.

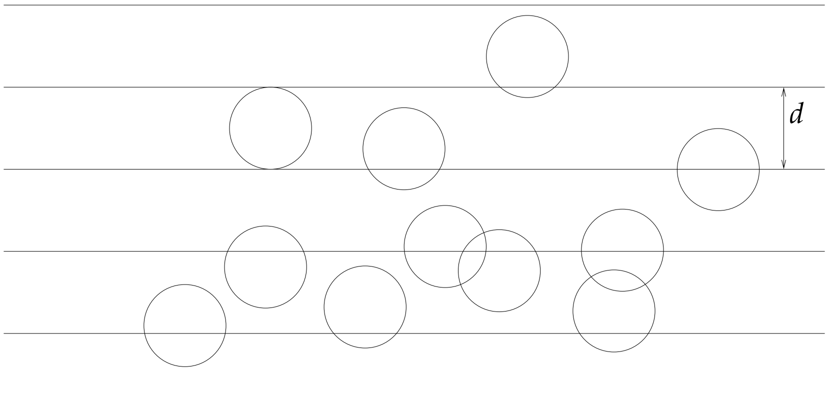
Net zoals we reële getallen kunnen benaderen met breuken, kunnen we ook een cirkel benaderen met veelhoeken. Archimedes toonde omstreeks 240 v.Chr. aan dat voor een gegeven natuurlijk getal $n > 2$ en een cirkel C er steeds een *ingeschreven* regelmatige n-hoek P_n bestaat, alsook een *omgeschreven* regelmatige n-hoek P^n. Voor de omtrekken $\ell(P_n)$, $\ell(C)$ en $\ell(P^n)$ van deze figuren geldt

$$\ell(P_n) \leqslant \ell(C) \leqslant \ell(P^n).$$

We hebben dus voor alle $n > 2$ dat

$$\mathbb{E}(P_n) \leqslant \mathbb{E}(C) \leqslant \mathbb{E}(P^n). \tag{5}$$

Bovendien wordt het verschil $\ell(P^n) - \ell(P_n)$ kleiner naarmate n groeit. In de limiet voor n



Figuur 5: Cirkels met diameter d hebben steeds exact 2 snijpunten met de rechten.

gaande naar $+\infty$ vinden we dat zowel de omtrek van de ingeschreven als van de omgeschreven regelmatige n-hoek streeft naar de omtrek $\ell(C)$ van de cirkel.

Laat ons nu het experiment uitvoeren met cirkelvormige naalden waarvan de diameter juist gelijk is aan d, de afstand tussen de lijnen. Het is merkwaardig dat die naalden *steeds* juist twee lijnen ontmoeten, hoe ze ook vallen. Het gemiddeld aantal snijpunten $\mathbb{E}(C)$ voor zulk een cirkelvormige naald C bedraagt dus exact 2.

Uit (5) en (4) leiden we nu af dat

$$c\ell(P_n) \leqslant 2 \leqslant c\ell(P^n).$$

Hieruit volgt door limietovergang

$$c \lim_{n\to+\infty} \ell(P_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} 2 \leqslant c \lim_{n\to+\infty} \ell(P^n)$$

of

$$c\ell(C) \leqslant 2 \leqslant c\ell(C). \tag{6}$$

De omtrek $\ell(C)$ kunnen we makkelijk berekenen. Er geldt $\ell(C) = \pi d$. De twee ongelijkheden in (6) leveren de gelijkheid

$$c\pi d = 2,$$

waaruit we de waarde van de constante c kunnen afleiden:

$$c = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{d}.$$

6 Bewijs van de Stelling van Buffon

We keren nu terug naar de naalden van Buffon en brengen formule (1) in herinnering voor het gemiddeld aantal snijdingen voor een naald van lengte ℓ.

$$\mathbb{E}(\ell) = p_1(\ell) + 2p_2(\ell) + 3p_3(\ell) + \cdots .$$

Als de lengte ℓ van de naald voldoet aan $\ell < d$, is het onmogelijk dat er meer dan 1 snijpunt is. Bijgevolg hebben we dat $p_2(\ell) = p_3(\ell) = \cdots = 0$ zodat

$$\mathbb{E}(\ell) = p_1(\ell).$$

Rekening houdend met (4) en de waarde van c levert dit

$$p_1(\ell) = c\ell = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{d},$$

wat de Stelling van Buffon bewijst.

7 Het experiment op π-dag 2015

Uit de stelling van Buffon halen we makkelijk dat

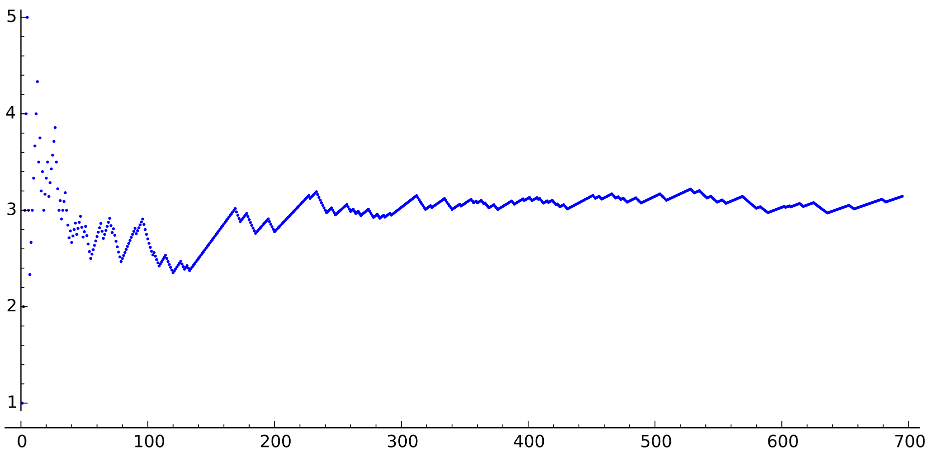
$$\pi = \frac{2}{p_1(\ell)} \cdot \frac{\ell}{d}.$$

In onze proef bedroeg de afstand d tussen de lijnen 1 meter en hadden de naalden een lengte $\ell = 0,5$ meter. Er werd in totaal $N = 695$ keer een naald gegooid en in $P = 221$ van de gevallen kwam de naald op een van de lijnen terecht.

Dit geeft $p_1(\ell) \approx \frac{P}{N} = \frac{221}{695}$ en we krijgen dus

$$\pi = 2\frac{N}{P} \cdot \frac{0.5}{1} = \frac{N}{P} = 3,14479638009.$$

Figuur 6 toont de evolutie van de benadering van π tijdens ons experiment.



Figuur 6: Convergentie van de benadering naar π.

8 Betere benaderingen

We hebben *bewezen* dat de verhouding tussen het totaal aantal worpen en het aantal worpen dat op een lijn terecht komt bij ons experiment nadert naar de waarde van π. Het duurt echter zeer lang vooraleer je bijvoorbeeld 10 decimalen van π correct hebt.

Er zijn dus betere methodes nodig indien men snel veel decimalen van π wil berekenen. We geven hier twee formules die veel gebruikt worden.

- Chudnovsky (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

- Bailey, Borwein en Plouffe (1997):

$$\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

  Bij elke stap van dit algoritme krijg je 8 (correcte) cijfers extra na de komma!

  Deze formule werd gebruikt door Kondo en Yee (2013) toen ze de eerste $1,2 \times 10^{13}$ decimalen van π berekenden.